УДК 539.3

О.К.МОРАЧКОВСКИЙ, докт.техн.наук; *В.Н.СОБОЛЬ*

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ И ОБОЛОЧЕК НА БАЗЕ СМЕШАННОГО ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА

В статті надані варіаційні постановки задач, методи їхнього розв'язання та результати дослідження з повзучості тонких стержнів та циліндричних оболонок. Постановки задач повзучості тонкостінних стержнів та циліндричних оболонок надані на основі мішаного варіаційного принципу Рейсснеру. Надані числові результати, дані із дослідження збіжності чисельних розв'язків та встановлено закономірності повзучості та пошкодження тонкостінних елементів конструкцій.

Расчеты конструкций машин на прочность в современных условиях требований к безопасности и экологии производств, экономичности и надежности техники не возможно выполнить без привлечения научно обоснованных методов механики и информационных технологий. Условия при эксплуатации и изготовлении деталей машин и элементов конструкций во многих отраслях промышленности характеризуются высоким уровнем их нагруженности и температуры. В расчетах на прочность таких деталей и элементов конструкций необходимо учитывать процессы ползучести, характеризующиеся накоплением необратимой деформации ползучести и поврежденности, приводящим к разрушению. Для многих ответственных элементов машиностроительных конструкций в расчетах на ползучесть используют расчетные схемы, отвечающие тонкостенным стержням и оболочкам. Возможности методов, базирующихся на решении дифференциальных уравнений краевых задач теории упругости, пластичности и ползучести весьма ограничены. Известно, что вариационные постановки таких задач служат удобной основой для построения и теоретического обоснования многих расчетов сложных конструкций [1,2].

В работе предложен эффективный метод расчета стержней и цилиндрических оболочек базе смешанного вариационного принципа Рейсснера и вариационно-структурного метода [3]. Такие подходы к решению задач прочности конструктивных элементов машин привлекают внимание многих исследователей, что объясняет актуальность темы исследований и проведенных результатов в данной статье.

Рассмотрим общую постановку задач ползучести тел, на которые действуют не изменяющиеся во времени внешние нагрузки. Используя обычные обозначения тензоров напряжений, деформаций и перемещений, например, принятые в [1, 5-7], для описания процесса ползучести вплоть до разрушения запишем следующую систему уравнений общей теории ползучести

$$\sigma^{ij}_{,j} + F^{\vee i} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = d_{ijkm}\sigma^{km} + C_{ij},$$

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}), \; u_i\big|_{t=0} = u_{i0}, C_{ij}\big|_{t=0} = 0, \qquad (1)$$

при заданных граничных условиях на нагруженной – Γ_p и закрепленной – Γ_u поверхностях тела

$$\sigma^{ij} n_j - \breve{p}^i = 0\,,\ u_i - \breve{u}_i = 0\,.$$

Конкретизация системы (1) устанавливается определяющими зависимостями для компонент тензора деформаций ползучести C_{ij}, которые в общей форме можно представить так

$$\begin{cases} \dot{C}_{ij} = \Lambda(\sigma_e, \omega) \cdot S_{ij} \\ \dot{\omega}_{ij} = \Omega(\sigma_e^{\omega}, \omega), \omega(0) = 0, \omega(t_*) = \omega_* \end{cases}, \tag{2}$$

где $\Lambda(\sigma_e, \omega)$, $\Omega(\sigma_e^{\omega}, \omega)$ – функции, определяемые по кривым ползучести вплоть образцов материала вплоть до разрушения; $\omega(t)$ – параметр повреждаемости; σ_e – эквивалентные напряжения, для которых используется интенсивность Мизеса; σ_e^{ω} – эквивалентные напряжения, принимаемые в теории длительной прочности.

Для материалов, которые при статической ползучести описываются зависимостями типа Нортона, функции $\Lambda(\sigma_e^{\omega}, \omega)$, $\Omega(\sigma_e^{\omega}, \omega)$ в (2) принимаются в следующем виде [4,5]

$$\begin{cases} \Lambda(\sigma_e, \omega) = \dfrac{B\sigma_i^{n-1}}{(1-\omega^r)^m} \\ \Omega(\sigma_e^{\omega}, \omega) = \dfrac{D(\sigma_e^{\omega})^k}{(1-\omega^r)^l}, \omega(0) = 0, \omega(t_*) = \omega_* \end{cases} \tag{3}$$

В данной работе применен метод решения задач ползучести тонких стержней и цилиндрических оболочек на базе совместного использования метода Ритца для отыскания на каждом шаге времени стационарной точки смешанного вариационного принципа Рейсснера и численного метода Рунге-Куты в модификации Мерсона [6,7] при интегрирования начальной задачи во времени .Смешанный вариационный функционал типа Рейсснера [1,2], отвечающий краевой задаче ползучести (1), (2) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_{u\sigma} = \iiint_V \left[\frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(u_{i,j} + u_{j,i} \right) - \sigma_{ij} C_{ij} - \Lambda(\sigma_{ij}) - \rho f_i u_i \right] dV - \\ - \iint_{S_t} t_i u_i dS - \iint_{S_n} \sigma_{ij} n_j (u_i - u_i^*) dS \end{aligned} . \tag{4}$$

Очевидными преобразованиями этого функционала при вычислении его вариации в произвольный момент времени на независимых перемещениях и напряжениях, с учетом, что $\delta C_{ij} = 0$, легко получить в качестве уравнений Эйлера-Остроградского уравнения (1).

Решение вариационного равенства для функционала Рейсснера на шаге времени осуществлялось вариационно-структурным методом. Структуры решений включали полиномиальные аппроксимации свободных компонент и удовлетворяли кинематическим граничным условиям.

Рассмотрим ползучесть при изгибе тонких стержней и цилиндрических оболочек с жестко защемленными краями. Структуры решений для неизвестных функций W, M, M_1, T_2 – прогибов, изгибающих моментов и сил, определенных в точках координатной оси стержня и оболочки приняты в виде:

$$W = \varpi \sum_{i=0}^{N} B_i P_i^w \ , \ M = \sum_{i=1}^{N} A_i P_i^M \ , \ \varpi = \left(\frac{z}{l^2} - \frac{z}{l} \right)^2 , \qquad (5)$$

для стержня

$$W = \varpi \sum_{i=1}^{N} B_i P_i^W \ , \ M_1 = \sum_{i=1}^{N} A_i P_i^{M_1} \ , \ T_2 = \sum_{i=1}^{N} C_i P_i^{T_2} \ , \ \varpi = \left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right)^2 , \qquad (6)$$

и для цилиндрической оболочки.

Здесь, соответственно, P_i – полиномы i-ой степени, A_i, B_i, C_i – коэффициенты аппроксимации, а ϖ – функция, позволяющая удовлетворить принятыми выше структурами главным граничным условиям.

По предложенному алгоритму решения задач ползучести в работе выполнены численные исследования. Для изучения сходимости численных решений и исследований закономерностей ползучести в работе рассмотрен стержень прямоугольного поперечного сечения с жестко защемленными краями, выполненного из материала Д16 АТ. Стержень при температуре 300 ^{0}C деформируется в условиях ползучести под действием распределенной равномерно поперечной нагрузкой q = 2,5 kN/м. Параметры стержня в расчетах приняты следующими: длина L = 2 м, ширина b = 0,01 м, толщина h = 0,1 м.

На рис.1, слева, приведены эпюры нормальных напряжений в сечении стержня, а на этом же рисунке, справа, даны прогибы стержня для разных моментов времени: 1 – в начальный, 2 – в момент времени l = 23 часа и 3 – в момент близкий к завершению скрытого разрушения l = 46 часов.

Рис. 1.Эпюры нормальных напряжений и прогибы

Расчеты проводились с удержанием 6-ти базисных функций в аппроксимациях прогиба и изгибающего момента вдоль длины стержня. Сетка для нахождения компонент необратимой деформации ползучести и параметра повреждаемости выбиралась следующей : 41 точка вдоль стержня и 7 точек – по высоте сечения стержня.

Далее рассмотрим ползучесть цилиндрической оболочки из материала Д16 АТ при температуре 300 ^{0}С с жесткими фланцами на краях, находящуюся под внутренним давлением q = 2000 kN/м^2. В расчетах параметры оболочки приняты следующими: длина L = 0,123 м, толщина $\hbar$ = 0,01 м, радиус срединной поверхности R = 0,25 м.

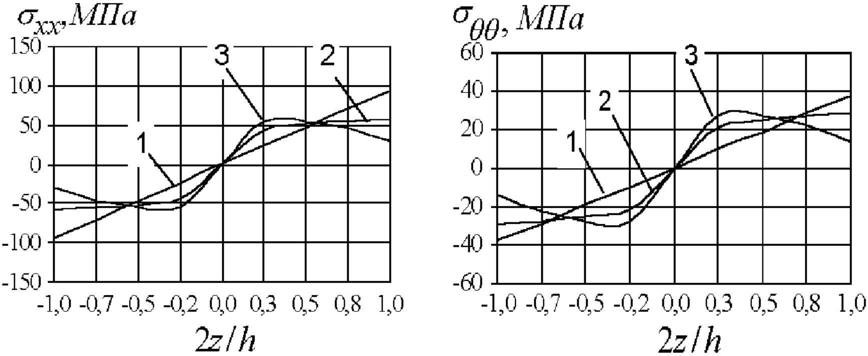

Рис. 2. Эпюры нормальных напряжений

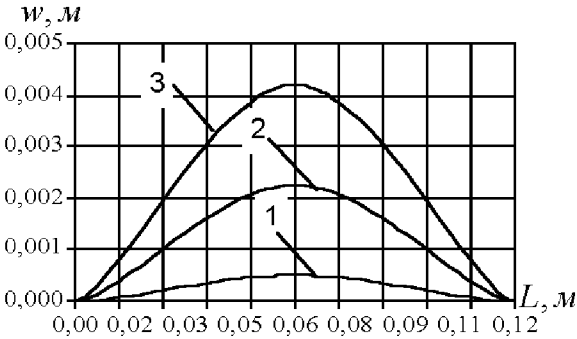

Рис. 3. Прогибы оболочки

На рис. 2 представлены эпюры нормальных напряжений в жестко закрепленном сечении оболочки для разных моментов времени:1 – начальный, 2 – момент времени l = 9,6 часа и 3 – к моменту времени близкому к завершению скрытого разрушения l = 19,5 ч. На рис. 3 представлены прогибы оболочки в эти же моменты времени.

Отметим, что напряжения в зоне жесткого фланца заметно перераспределяются во времени и нелинейно распределены по сечению оболочки. Прогибы со временем возрастают, необратимо формообразуя оболочку вследствие ползучести.

Расчеты проводились с удержанием 10 – ти базисных функций в аппроксимациях прогиба, изгибающего момента и окружной продольной силы вдоль длины оболочки. Сетка для нахождения компонент необратимых деформаций ползучести и параметра повреждаемости выбиралась следующей: 41 точка – вдоль длины оболочки и 9 точек - по толщине.

Расчетами установлено, что с увеличением числа базисных функций и количества точек дискретизации области эти результаты практически не изменяются.

Список литературы: **1.** *Сливкер В.И.* Об одной смешанной вариационной постановке задач для упругих систем // МТТ, №4, 1982. – С. 88 - 97. **2.** *Розин Л.А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. Ленинград, изд.-во ЛГУ, 1978. – 222 с. **3.** *Рвачев В.Л.* Теории R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982 – 552с. **4.** *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. Учебник для студентов вузов. Изд. 2 - е, перераб. и доп. М., “Машиностроение”, 1975. 400 с. **5.** *Бойл Дж., Спенс Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести: Пер. с англ. - М.: Мир, 1986. – 360 с. **6.** *Naumenko K.* On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep lifetime estimations. Tech. Mech., 20, (2000). – P. 215-226. **7.** *H. Altenbach, O. Morachkovsky, K. Naumenko, A. Sychov.* Geometrically nonlinear bending of thin - walled shells and plates under creep - damage conditions. Arch. Appl. Mech., 67, (1997). – P. 339 - 352.

Поступила в редколлегию 10.07.02

УДК 539.3

О.К.МОРАЧКОВСКИЙ, докт.техн.наук; ***А.А.ЗАМУЛА***

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ СТЕРЖНЕЙ И ОБОЛОЧЕК НА БАЗЕ МКЭ И СДВИГОВОЙ ТЕОРИИ

В статті надані постановки задач, методи їхнього розв’язання та результати дослідження з повзучості стержнів та осесиметричних оболонок. Постановки задач повзучості стержнів та оболонок надані на основі МСЕ та теорії зсуву першого порядку відносно переміщень та повного кута повороту перерізу. Надані числові результати, дані із дослідження збіжності чисельних розв’язків в залежності від дискретизації та встановлено закономірності повзучості та пошкодження розглянутих елементів конструкцій.

Тонкостенные элементы конструкций, в частности, стержни и оболочки, сочетают в себе относительную легкость, высокую прочность и жесткость, что объясняет их широкое использование во многих областях техники. В энергетическом, авиационном и химическом машиностроении ответственные элементы машин и конструкции эксплуатируются при высоких температурах и уровнях нагрузок. В этих условиях конструктивные элементы деформиру-